
研究部会だより

カオス同期する世界

Chaotic Synchronization World

梅野 健

Ken Umeno

カオス同期現象とは、世界の1つの普遍的な形態であり、1983年、日本で藤坂博一（当時：鹿児島大学）等によって発見された現象である。藤坂は2つのローレンツアトラクターを結合した時、アトラクターが同期することを発見した。この場合、同期といっても、リミットサイクルアトラクターに同期するのではなく、共通のカオスアトラクターに引き込まれるのである。初期値が僅かでも変われば、その引き込まれるカオスアトラクター軌道が異なるものになるというカオス性を持つというカオス現象の一形態の発見であった。

ただ、そのカオス同期の真の意義を理解できる人は当時ほとんどいなかった。その後、米国でPecoraとCarrollが、1990年、カオス同期現象を非線形回路の結合で再発見した。信号の同期カオスはある種の秘匿性を持ち、そこからこのカオス同期現象がカオスを応用した新しいタイプのカオス通信システムを実現すると期待された。その後、レーザーに遅延フィードバック（戻り光）を入れると光学系の実験においてもカオス同期が実験的に再現できる様になった。日本応用数理学会に应用カオス研究部会が設立されたのはそんな頃である。それ以来、研究部会では、一貫として、カオス同期現象の研究を取り上げ、裾野を広げ、更に深化させている。では何故そんなにカオス同期が面白いのか？ それを解き明かすことを本稿の目的としたい。

ここで、应用カオス研究部会は、単純にカオスの応用を研究するというのではなく、カオスが応用できるその基本メカニズムや数理を研究するグループである。当然、そこで継続的に取り扱う面白い数理やメカニズムがなければいけない。一見するとカオス同期はカオス力学系とカオス力学系とが結合し、そのカオスが同期するというある種のカオスの特殊形態の様に見える。外から見るとそんな変態的 special form を研究して何が面白いのか？ いやいや、全くそんなことはないというのがこの小文の結論であるのは論を俟たないが、そこをこの应用カオス研究部会の研究の足跡（2006–2024）を通して少しずつ解き明かしていこう。通常の論文だと、誰それがこれをやったと紹介するが、ここでは何が面白いのかを説明するのが主眼となるため、そこは省略しその面白さのロジックだけを説明することにする。

2006年の应用カオス研究部会第一回となる年会のOS（筑波大学）で、2つのコースー分布を持つカオス力学系に共通のコースー分布を持つカオス力学系の信号を入力する時、同期する一種の共通ノイズ同期現象が紹介された。この場合、入力するカオス信号の大きさをだんだん大きくすると、相転移的に最初は非同期的なカオスであったのが、ある入力値を超えるとカオス同期する現象が報告された。これ

はシミュレーションモデルである。これは別の系でも似た様な振る舞い、つまりある臨界的な大きさの入力値まではカオス同期が起こらず、臨界値を超えるとカオス同期が起こる。では何がその臨界値を決めているのか？ これについては2018年には、完全に解る様になった。可解カオスというコーシー分布を持つ力学系（一般化ブル変換）を用いることで、まず2つのシステムの2本の軌道が同期したと仮定した時に、摂動を加える時に同期を維持するかそれとも離れていって同期が外れるかを定める条件付きリアプノフ指数を厳密に計算することに成功した。これはコーシー分布が安定分布の一種であり、コーシー分布（元の力学系）とコーシー分布（外部ノイズ）を足したとしても**安定分布の持つ加法性**からそれぞれのコーシー分布の尺度母数の和を新たな尺度母数として持つコーシー分布となるのが鍵となる。この条件付きリアプノフ指数がカオス同期の鍵であり、その**条件付きリアプノフ指数が0**となる外部入力値がカオス同期の臨界点となることから、そこからカオス同期の臨界的入力値も厳密に計算できることに成功した。

更に、今度は同じ可解カオスというコーシー分布を持つ力学系を相互に結合した時にも同様に条件付きリアプノフ指数が厳密に求めることができ、更に、共鳴的な発散する現象も発見された。この2体系については2021年には完全に明らかになった。そうこうするうちに、今度は実験グループでTHzのカオス信号を安定的に生成するのに、レーザーカオスの**モード同期**が本質的な役割を果たすことが明らかになった。更に、このカオス同期は2体系だけではなく3体系、4体系でも起き、その中で部分的にカオス同期をする現象や条件も明らかになった。これは、現在任意の自由度の多体系にもカオス同期が起こることが拡張されている。さて、ここにきて、カオス同期には、多自由度の結合力学系でエントロピーを劇的に減少させる効果が確認され、また逆に非線形なカオス結合系でカオス同期が唯一つのエントロピー減少機構であることが分かった。これは、大変面白い事実である。脳が何故スパコンのエネルギーよりも劇的に少ない（100万分の1から1,000万分の1）のかというのは根元的な問題であるが、ここに来て多体ニューロン系のカオス同期がそのエントロピー減少の機能を担うことが示唆される様になってきたからである。宇宙初期にカオス同期がエントロピーを減少させる機能としてもカオス同期が着目されている。これらを含めて我々はこのカオス、カオス同期の性質を**カオス超越性**という普遍的な特徴の1つとして捉えることになった。脳、宇宙、といった我々の世界の普遍的な機構としてカオス同期があり、我々はカオス同期する世界の真理の秘密を解き明かすことに夢中になっている。