

複素数を用いたカオス・フラクタルの可視化と 複素結合力学系に見られる同期現象

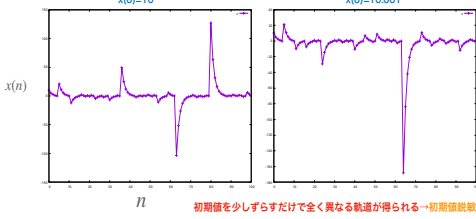
Visualization of Fractal and Synchronization of Coupled Complex Dynamical System

京都大学大学院 情報学研究科 物理統計学分野 比果奨人, 梅野健

$f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ の生成するカオステータ列(実数)

$$x(n+1) = \frac{1}{2} \left(x(n) - \frac{1}{x(n)} \right)$$

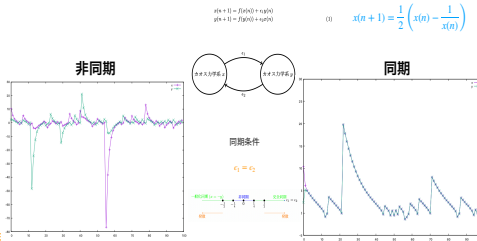
初期値を与えると下のグラフが得られる。



初期値を少しずらすだけで全く異なる軌道が得られる→初期値鋭敏性

2体系モデルの同期実験(実数)

同期条件 $\epsilon_1 = \epsilon_2$



カオスの初期値鋭敏性と同期

$$x(n+1) = \frac{1}{2} \left(x(n) - \frac{1}{x(n)} \right)$$

カオスを生成するが、カオス系にいえる一般的性質として初期値鋭敏性というのがある。

同じ力学系で生成されたとしても互いに独立している力学系同士は、初期値が微量でも違えば、指数関数的にその誤差は増え、同期することはない。

しかし、カオス系同士をうまくお互いに結合すれば、値が同期するようになる。

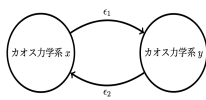
2体系モデルの同期実験(複素数)

$$f(x) = r(\cos\theta + isin\theta), \quad r > 0 \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

双方向結合型ネットワーク [2]

赤線部がシミュレーションにおける変数

$$\begin{aligned} x(n+1) &= f(x(n)) + \epsilon_1 y(n) \\ y(n+1) &= f(y(n)) + \epsilon_2 x(n) \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

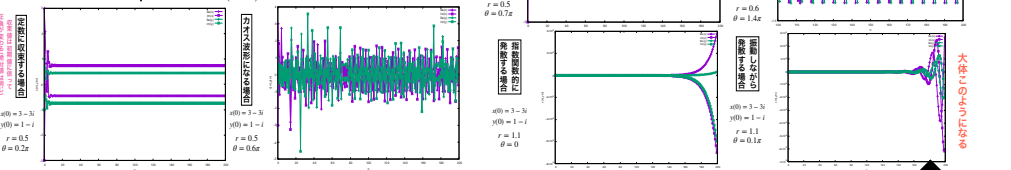


非結合状態($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$)の数値の動き

$$f(x) = r(\cos\theta + isin\theta), \quad r > 0 \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x(n+1) &= f(x(n)) & x(n), y(n) &\in \mathbb{C} \\ y(n+1) &= f(y(n)) & x(0) &\neq y(0) \end{aligned}$$

実質、独立な1体系としての数値を見ている

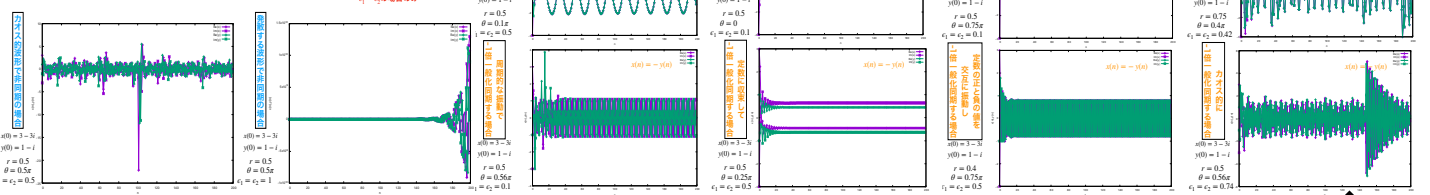


結合状態($\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$)の数値の動き

$\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ の場合は相互に影響は与え合うが、わかりやすい(明らかな)同期現象は見られない。

$\epsilon_1 = \epsilon_2$ の場合、一部条件下において同期現象が確認できる。

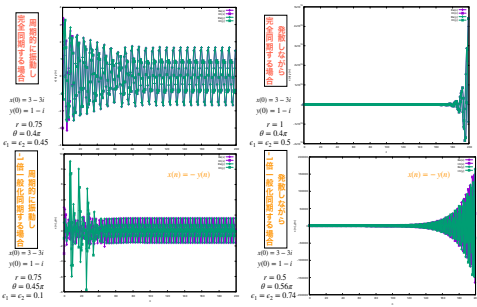
以下紹介するシミュレーション結果は $\epsilon_1 = \epsilon_2$ の場合のみ



グラフィックシミュレーション

・実軸、虚軸による複素2次元座標が画像 f の $(r(\cos\theta + isin\theta))$ として表され、その画像を用いてn回写像を繰り返した時の結果の数値を用いて色付け

・色付けはHSV(Hue:色相(全色グラデーション)、Sat:彩度(MAXに固定)、Value(MAXに固定))形式である数値をHueに入力して決定



提示するグラフィックシミュレーション

- ・非発散かつ同期現象が見られる範囲を可視化
 - 名前: 同期範囲
 - 同期性: 初期状態からn回写像操作後の誤差が閾値以下かどうか
 - カオス(同期領域鋭敏性判定: 微小初期誤差(0.001)のn回写像操作後の誤差が1e-1以上であるかどうか
 - 発散判定:n回写像操作後の実数、虚数の絶対値の和が閾値以上かどうか
 - 色付け: 同期状態に至る速さ(リアプノフ指数の-1) → Hue
- ・非発散かつカオス性が見られる範囲を可視化
 - 名前: 1発-非同期領域
 - 同期性: 1発-非同期領域を判定したときにカオス性が見られる範囲を表示
 - カオス(同期領域鋭敏性判定: 微小初期誤差(0.001)のn回写像操作後の誤差が1e-1以上であるかどうか
 - 発散判定:n回写像操作後の実数、虚数の絶対値の和が閾値以上かどうか
 - 色付け: 同期領域鋭敏性の強さ(リアプノフ指数) → Hue

カオス同期現象に関する グラフィックシミュレーションの改善点

- ・カオス同期現象が起こる条件範囲のみ色のプロットをしてほしいが、それ以外の条件範囲にもプロットしてしまっている。(大体はカオス同期が確認される)
- 推測される原因
 - カオス性の判定は微小な初期誤差がn回写像後、 1.01^n 倍以上なら初期値鋭敏性があるとしてカオス性ありと判定される。
 - この方法なら、定数収束以外の同期現象は初期値によってn回写像後の値が初期誤差より大きくなり初期値鋭敏性があると判断されてしまい見分けがつかない。
 - また定数収束の場合も初期値によって収束値の正負が変わることもあり、その場合も初期値鋭敏性があると判断される。

→カオス性の判定には初期値鋭敏性以外の観点から行う必要があるかも

今後の展望

- ・カオス・フラクタルの可視化を続けていき、カオスを手軽に触れてもらえるように、Webサイトにグラフィックカオスシミュレーションを実装予定
- ・カオス・フラクタルの可視化の表現幅を広げると共に、その性質や扱い、見方の教養を深めていきたい。

Reference.

- ・結合可解カオス系の同期現象と同期条件について (比果, 梅野, 京都大学情報学研究科修士論文)
- ・可解カオス系の四角網ネットワーク結合モデルにおける同期現象とその解析(比果, 梅野, 京都大学情報学研究科修士論文)
- ・Conditional Lyapunov exponent criteria in terms of ergodic theory(Masaru Shintani,Ken Umeno,2018)(Progress of Theoretical and Experimental Physics,2018)
- ・結合可解カオス系の提案とその特異的な振る舞いについて-可解カオス場の理論構築に向けて-(梅野健, 2017)
- ・カオス現象の発見とその影響 (上田よし亮) (理論応用力学講演会講演集(58回))